DEVOIR NUMÉRO 2 VERSION B

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1 *Question de cours.*
Soit E un espace vectoriel. On suppose que les vecteurs $e_1, e_2, \cdots, e_n$ forment une base de E. Après avoir expliqué la différence entre

$$(e_1, e_2, \cdots, e_n) \quad \text{et} \quad \{e_1, e_2, \cdots, e_n\},$$

vous présenterez et défendrez votre choix de notation préféré.

Indication : il n'y a pas de bonne réponse, seule l'argumentation compte.

Exercice 2 *Un exemple.*
On considère une fonction f définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que

- f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions f et f' n'admettent pas de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

1. Dessiner le graphe d'une fonction f qui satisfait aux conditions précédentes.

2. Cette fonction f étant donnée, on définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante

$$g(x) = \begin{cases} x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0. \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

  a. Montrer que cette fonction g est continue en 0.

  b. Montrer à l'aide du taux d'accroissement que g est dérivable en 0.

  c. Exprimer la dérivée de g en tout point $x \neq 0$ en fonction de f et de sa dérivée f'.

  d. Déduire des deux questions précédentes que g' n'est pas dérivable en 0.

  e. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

3. De quelle propriété du cours vient-on de montrer que la réciproque était fausse ?

Date: 4 Octobre 2024 14h00-18h00.
http://louismerlin.fr.

Exercice 3 *Inspiré d'**HEC** 2009 Exercice.*
Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit les deux applications suivantes, notées d et tr,

$$\mathrm{d} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad-bc \end{array}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a+d \end{array}.$$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appellera $\mathrm{d}(A)$ le *déterminant* de A et $\mathrm{tr}(A)$ sa *trace*.
On rappelle la définition suivante.

Définition : Matrices semblables.
Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

1. **Propriétés de la trace**.
   a. Montrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer une base du noyau de tr.
   c. En déduire l'image de tr.
   d. Établir que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
   e. Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.
   f. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
   g. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A et ${}^tA$ ont la même trace.

2. **À propos du déterminant**.
   a. Calculer $\mathrm{d}(2I)$. En déduire que l'application d n'est pas linéaire.
   b. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Établir la formule : $\mathrm{d}(AB) = \mathrm{d}(A) \times \mathrm{d}(B)$.
   c. On suppose que P est une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $\mathrm{d}(P)$ est non nul.
   d. Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $\mathrm{d}(P^{-1}AP) = \mathrm{d}(A)$.
   e. En déduire que deux matrices semblables ont le même déterminant.
   f. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A et ${}^tA$ ont le même déterminant.
3. Aux questions 1f et 2e, nous avons montré que deux matrices semblables ont même déterminant et même trace. Montrer que la réciproque de cette propriété est fausse.
4. Dans cette question seulement, on suppose que A est semblable à une matrice diagonale
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que
$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A), \qquad \text{et} \qquad \lambda_1\lambda_2 = \mathrm{d}(A).$$
5. Dans toute la suite, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   a. Montrer que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \mathrm{d}(A)I = 0$
   b. À l'aide de la question précédente, prouver la réciproque à la question 2c.
6. Dans cette question seulement, on suppose que A est **non colinéaire à** I. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et on introduit
$$w = e_1 + e_2.$$

a. (i) Montrer que, s'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ et $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, alors nécessairement $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(ii) Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir simultanément $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ et $Aw = \lambda_3 w$, quels que soient les réels λ_1, λ_2 et λ_3.

b. En déduire qu'il existe au moins un vecteur non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, Ax))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

La dernière question de cet exercice est réservée aux cubes, elle est hors barème pour les carrés.

7. **a.** Écrire la matrice de l'endomorphisme associé à A dans la base de la question précédente.

b. En déduire que toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée.

Exercice 4

Partie I : Cours en bourse d'une action.

On s'intéresse aux variations journalières d'une action sur un marché financier, qu'on suppose aléatoires. On introduit, pour $j \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_j correspondant à l'état de la variation de l'action le jour j. Naturellement, au début de l'observation, l'action n'a pas encore varié et on a $X_0 = 0$. On suppose de plus que, chaque jour, le cours de l'action :

- monte d'une unité $(+1)$ avec probabilité p $(0 < p < 1)$
- ou bien descend d'une unité (-1) avec probabilité $q = 1 - p$.

On note X_{2n} le cours de l'action constaté le $2n$-ième jour suivant le début de l'observation.

Par exemple, si $n = 2$ et que le cours a baissé les trois premiers jours et monté le quatrième, on a $X_4 = -1 - 1 - 1 + 1 = -2$.

Enfin, on note

$$p_n = P(X_{2n} \geqslant 0)$$

et on s'intéresse à l'évolution de p_n lorsque n devient grand, c'est-à-dire qu'on cherche à estimer la probabilité, après un grand nombre (pair) de jours, que le cours de l'action soit en hausse.

1. Simulation sous Python.

a. Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui renvoie une simulation de X_{2n}.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X_2(n,p) :
  x=0
  for ........... :
    if ........... :
      ..............
    else :
      ..............
  return x
```

b. On ajoute le code de la fonction suivante. Que fait-elle ? Préciser ce que contiennent les variables `L` et `c`

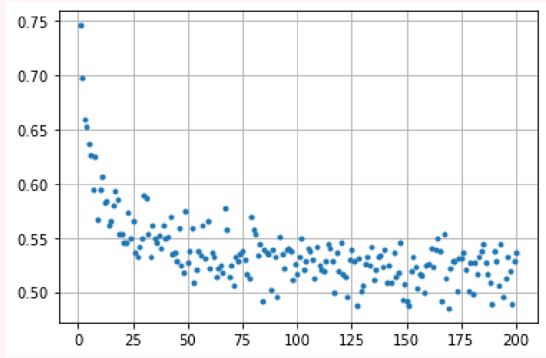
```python
def mystere(n) :
  L=[]
  c=0
  for k in range(1000) :
    L.append(simul_X_2(n,p))
  for j in range(1000) :
    if L[j] >= 0 :
      c=c+1
  return c/1000
```

c. Les commandes ci-dessous permettent d'obtenir la figure ci-contre

```python
import matplotlib.pyplot as plt

p=1/2
N=[k for k in range(1,201)]
P=[mystere(k) for k in N]
plt.grid()
plt.plot(N,P,'.')
plt.show()
```

Affichage Python



Que peut-on conjecturer sur la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. Déterminer $X_{2n}(\Omega)$.

3. On note Y_{2n} le nombre de jours (durant les $2n$ jours d'observation) où l'action a monté et Z_{2n} le nombre de ceux où elle a baissé.

a. Quel lien y a-t-il entre Y_{2n} et Z_{2n} ?

b. Expliciter les lois de Y_{2n} et Z_{2n} et préciser leurs espérances et leurs variances.

4. Quelle autre relation lie X_{2n}, Y_{2n} et Z_{2n} ? En déduire l'expression de $E(X_{2n})$. Interpréter le cas particulier $p = 1/2$.

5. Montrer que pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$,

$$P(X_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}.$$

En déduire une expression de p_n à l'aide d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie II : Des coefficients binomiaux

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

6. **a.** Calculer S_1, S_2, S_3.

b. On rappelle qu'en Python, la commande np.prod(liste) permet d'obtenir le produit des valeurs de la liste prise en argument.

(i) Écrire $\binom{2n}{n+i}$ comme un quotient de produits.

(ii) En déduire une fonction Python d'en-tête def suite_S(n) : qui renvoie la valeur de S_n.

c. Justifier que

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2^{2n}.$$

d. En déduire que

$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

On commencera par montrer que

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} + \binom{2n}{n} = 2S_n.$$

7. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \binom{2p}{p} 2^{-2p}$.

a. Montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} u_p.$$

b. En déduire, par récurrence, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

c. En déduire la limite de u_p lorsque p tend vers $+\infty$.

8. On revient aux variables aléatoires de la partie **I** et on suppose dans cette question que $p = 1/2$. On rappelle que $p_n = P(X_{2n} \geqslant 0)$.

À l'aide de la question 5, exprimer p_n à l'aide de S_n, puis montrer que

$$p_n = \frac{1}{2} + \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)}.$$

Que valent p_1, p_2, p_3 ?

Quelle est la limite de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Comparer avec la conjecture faite à l'aide de Python.